

REPRESENTACIÓ DELS ESTATS D'UNA TELA BASADA EN LA DERIVADA DE LA INTEGRAL D'ENLLAÇ DE GAUSS*

Franco Coltraro,^{a, b} Josep Fontana,^b Jaume Amorós,^b Maria Alberich-Carramiñana,^{a, b} Júlia Borràs,^a Carme Torras^a

^a Institut de Robòtica i Informàtica Industrial, CSIC-UPC, c/ Llorens i Artigas, 4-6, 08028, Barcelona, Espanya. franco.coltraro@upc.edu

^b Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanya.

Resum: La manipulació robòtica de teles és una tasca complexa a causa de l'espai d'estats de forma d'infinites dimensions dels tèxtils, que dificulta molt la percepció dels estats. En aquest article introduïm les *coordenades de tela dGLI*, una representació de dimensió baixa dels estats d'una tela que ens permet distingir de manera eficient una gran varietat d'estats de plegament, fet que obre les portes a mètodes d'aprenentatge eficients per a la planificació i el control de la manipulació de teles. La representació es basa en una derivada direccional de la *integral d'enllaç de Gauss* i ens permet representar configuracions de plegament espacials i planàries de manera consistent i unificada. Es comprova que les *coordenades de tela dGLI* que proposem són més encertades en la representació dels estats de la tela i significativament més sensibles als canvis en possibilitats de premsió que altres mètodes clàssics de distància de formes. Per acabar, apliquem la representació a imatges reals d'una tela i es demostra que permet identificar els diferents estats utilitzant un classificador basat en la distància.

Paraules clau: etiquetatge semàntic d'estats, manipulació robòtica de teles, representació i classificació d'objectes deformables, integral d'enllaç de Gauss (GLI).

1. Introducció

Els objectes tèxtils són importants i omnipresents en moltes situacions rellevants del dia a dia en contextos com ara el domèstic, el sanitari o l'industrial. Ara bé, a diferència dels objectes rígids, que tenen una posa fixada donades la posició i l'orientació, els objectes tèxtils suposen un repte en la manipulació robòtica perquè canvien de forma amb el contacte i el moviment, fet que genera un espai de configuracions d'infinites dimensions (si es consideren superfícies contínues en un espai 3D). Aquest salt dimensional immens fa que els mètodes de percepció i manipulació existents siguin difícils d'aplicar als tèxtils. Els articles de revisió recents sobre manipulació de teles, com ara [28, 35], coincideixen en la necessitat de trobar una representació simplificada que permeti mètodes d'aprenentatge més potents per a solucionar diferents problemes relacionats amb la manipulació de teles.

La bibliografia descriu diferents representacions; p. ex., representacions de silueta [22] o contorns [9], suposant que es disposa del raonament d'alt nivell dels estats de la tela. Els enfocaments d'aprenentatge d'inici a fi més moderns utilitzen imatges RGBD directament [20, 29, 32], però només poden definir accions molt simples a causa dels límits en la representació d'estats. A més a més, aquests mètodes basats en l'aprenentatge profund requereixen grans quantitats de dades reals o simulades (p. ex. [17, 21]) que són cares d'obtenir i etiquetar, ja que no s'utilitzen coneixements de base previs per a entendre la relació geomètrica entre estats diferents. Per tant, aconseguir una representació de dimensió baixa per a un teixit basada en característiques de nivell baix és un problema encara no resolt, mentre que l'aspecte d'alt nivell d'entendre la deformació de la tela quasi no s'ha explorat encara.

Adicionalment, per a fer possible el raonament, l'abstracció i la planificació, la manipulació d'objectes rígids utilitza mètodes de reconeixement d'objectes per a connectar objectes amb accions [6, 34]. Els contactes entre objectes es perceben per a reconèixer estats com ara «a sobre de» i «a dins de» [2]. Ara bé, pel que fa a la manipulació de teles, cap estudi no ha explorat la identificació de l'estat semàntic que podria conduir a accions específiques segons la tasca en qüestió. Per a objectes deformables més simples, com pot ser una caixa amb una tapa articulada, la configuració oberta permet clarament l'acció de tancar la caixa o d'agafar-ne el con-

* Aquest article forma part del projecte Articles Mirall de l'Institut d'Estudis Catalans, dins el marc del Pla d'Enfortiment de la Llengua Catalana en el Sistema Universitari i de Recerca de Catalunya, impulsat pel Departament de Recerca i Universitats de la Generalitat de Catalunya. Article original: «A Representation of Cloth States based on a Derivative of the Gauss Linking Integral», *Applied Mathematics and Computation* (en línia), 457 (2023), <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128165>>, sota llicència Creative Commons Attribution 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>. Traduït per Òscar Aznar Alemany. Correspondència: franco.coltraro@upc.edu.

tingut. Un exemple equivalent per a una tela seria reconèixer una punta plegada que cal desplegar, si la tasca és estendre la tela plana sobre la taula, o una punta que cal agafar, si la tasca és plegar-la. En aquest cas, voldrem descompondre l'espai de configuració d'un tros de tela en macroestats (o, simplement, estats) i que cada estat sigui un conjunt de configuracions de la tela que es puguin manipular de la mateixa manera, és a dir, que tenen possibilitats de prensió similars.

En aquest estudi presentem una representació en coordenades de la configuració de la tela com una matriu triangular superior (vegeu la figura 1). Aquesta representació es pot calcular amb una fórmula tancada a partir de característiques de baix nivell de la tela (la posició del seu contorn) i permet el reconeixement i la classificació d'estats de nivell alt, ja que podem definir la distància entre les configuracions de la tela. Amb aquesta representació podem classificar les configuracions en estats que identifiquem com a «diferents», és a dir, que tenen diferents accions possibles.

El fet que la nostra representació de dimensió baixa depengui només de la posició del contorn de la tela es confirma amb el resultat que en certes condicions les corbes del contorn d'un tèxtil en determinen completament la posició a l'espai. Efectivament, a [3] es demostra que una corba genèrica tancada, simple i regular a trossos només pot ser el contorn d'un nombre finit de superfícies desenvolupables (és a dir, amb curvatura gaussiana 0) amb una curvatura mitjana no nul·la. Com que l'estat original d'un tros de tela és sense plegaments i pla, el conjunt d'estats possibles, si suposem que el tèxtil és inextensible (és a dir, la primera forma fonamental és constant en el temps, vegeu [7]), és precisament el conjunt de superfícies desenvolupables isomètriques a una de fixa. Per a problemes com l'estudi de la dinàmica de teles no cal que el problema del contorn tingui una solució única. N'hi ha prou amb saber que sempre tindrà un conjunt finit de solucions perquè llavors aquest conjunt de solucions és discret, amb diferents solucions separades per un salt no trivial en qualsevol etiquetatge basat en energia, coordenades locals, etc. Això

implica que, durant el moviment continu de la tela, la posició d'una peça de roba ve determinada per la posició del seu contorn.

Les nostres coordenades es basen en un índex topològic, la *integral d'enllaç de Gauss* (GLI, de l'anglès *Gauss linking integral*). Aquest índex s'ha utilitzat en el passat en manipulació robòtica [16, 24, 30, 31, 37], però només es pot aplicar a corbes 3D. Per a un parell de corbes quasi coplanàries, com són les corbes del contorn d'una peça de roba plegada, la GLI s'anul·la i deixa de ser informativa. Per a incloure les corbes quasi coplanàries (ahora que les corbes 3D), aquí introduïm el concepte de *derivada direccional de la GLI*, la *dGLI*, aplicada a un parell de corbes. La *dGLI* és simètrica respecte a les corbes i només depèn de la seva posició relativa. Assignem les *coordenades de tela dGLI* a un estat d'una peça de roba de la manera següent: primer seleccionem un subconjunt de segments de les vores (que les pot contenir totes) de la discretització del contorn de la peça; llavors fixem un ordre per a aquests segments i calculem la *dGLI* entre cada parell de segments en la seva posició espacial de l'estat present de la peça, cosa que genera una matriu simètrica de la qual només es pren la part triangular superior per a evitar redundàncies, i les *coordenades de tela dGLI* de l'estat són precisament els elements d'aquesta matriu triangular superior (vegeu la figura 1). La representació resultant es pot calcular de manera eficient i és invariant a moviments isomètrics de la peça (és a dir, rotacions i translacions), i deixa invariant una direcció específica que és normal al pla predominant de l'escena (és a dir, la taula que fa de suport en la manipulació).

L'article s'estructura de la manera següent: al proper apartat presentem els conceptes preliminars que utilitzem, com ara la *integral d'enllaç de Gauss*, i n'expliquem les limitacions en un entorn pla. A l'apartat 3 introduïm el concepte inèdit de la *derivada direccional de la GLI*, que també és aplicable a configuracions planes. Primer derivem una expressió per a la GLI de dos segments, llavors demostrem que quan els segments són coplanaris podem pertorbar-los lleugerament fins a obtenir informació i expliquem com aplicar-ho a una tela per a la qual s'ha generat una malla que

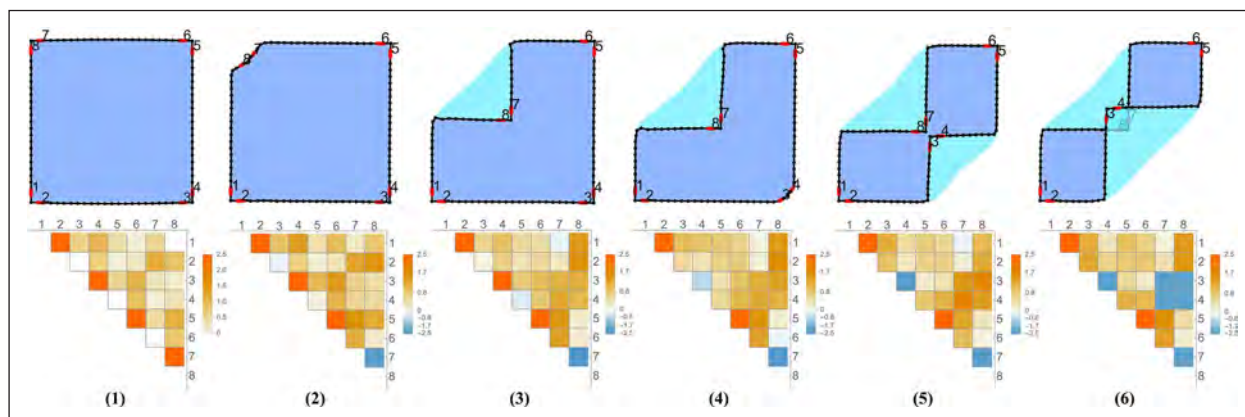


FIGURA 1. Seqüència de plegament d'una tela quadrangular amb les respectives *coordenades de tela dGLI* representades com a matrius triangulars superiors. Cada element m_{ij} de la matriu és un valor geomètric que correspon a la *dGLI* entre els segments i i j destacats en vermell en l'estat de plegament de la tela corresponent. Vegeu com alguns valors de la matriu canvien de signe quan les puntes es pleguen o es creuen entre elles.

l'aproxima. Després, estudiem algunes propietats d'aquest índex nou aplicant-lo a una base de dades de configuracions de tela d'un tovalló extretes de seqüències de plegament simulades i, seguidament, l'índex es posa a prova experimentalment amb imatges reals. També demostrem que és possible aplicar aquesta representació a peces de roba amb una topologia no trivial, com ara uns pantalons curts. Per acabar, discutim els resultats i exposem les conclusions a l'últim apartat.

2. Preliminars i estudis relacionats

Definició 1 (integral d'enllaç de Gauss de dues corbes). Donades dues corbes $\mathcal{C}^2$ no intersecants en un espai 3D γ_1 i γ_2 parametritzades per $x(s)$ i $y(t)$, respectivament, amb $s, t \in I = [0, 1]$, la *integral d'enllaç de Gauss* entre elles, abreviada com a *GLI*, és

$$GLI(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \int_I \int_I \frac{(y(t) - x(s)) \cdot (y'(t) \times x'(s))}{\|y(t) - x(s)\|^3} dt ds$$

o escrit de manera compacta

$$GLI(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{(\gamma_2 - \gamma_1) \cdot [\gamma_2' \times \gamma_1']}{\|\gamma_2 - \gamma_1\|^3} \quad (1)$$

Aquesta integral doble és invariant a reparametritzacions de les corbes. En el cas que totes dues corbes γ_1 i γ_2 siguin tancades i regulars, la seva *GLI* té valors enters (a causa del factor de normalització $\frac{1}{4\pi}$ escollit) i és un invariant de la topologia de la immersió de les corbes (el seu *nombre d'enllaç*, vegeu [1]).

Històricament, la *GLI* va ser introduïda per Gauss, pel que sembla amb relació als seus treballs en magnetisme (segons [27]) o en astronomia (segons [11]). Considerant la *GLI*(γ, γ) de dues corbes iguals regulars no autointersecants γ , llavors la integral doble (agafant el domini d'integració fora de la diagonal de $I \times I$) defineix un altre invariant geomètric de la corba, conegut com a *writhe* o *nombre d'entortolligament* de γ . Malgrat que s'assemblen, la *GLI* i el nombre d'entortolligament mesuren magnituds diferents: considerem un camp vectorial normal v de longitud $\epsilon > 0$ en γ i la corba γ_v de punts terminals del camp vectorial v , que hi està immersa i està en correspondència regular d'un a un amb γ per a una ϵ suficientment petita. Llavors, la diferència entre la *GLI* d'aquestes dues còpies de la mateixa γ i el nombre d'entortolligament és *GLI*(γ, γ_v) - *GLI*(γ, γ) igual a l'entortolligament total de v . Aquest resultat es coneix com el *teorema de Călugăreanu-White-Fuller* (vegeu [23]). D'altra banda, tots dos índexs, la *GLI* i el nombre d'entortolligament, són no informatius per a corbes planàries, ja que ambdós s'anul·len.

La *GLI* s'ha utilitzat en moltes aplicacions des que una versió de la fórmula per a corbes poligonals va aparèixer en

el context de les estructures proteiques del DNA [19], amb formulacions eficients addicionals proposades a [18], de les quals hem escollit la següent: donades dues corbes lineals a trossos de N i M segments, és a dir, $\gamma_1 = \{\gamma_{P_i P_{i+1}}', i = 1, \dots, N\}$ i $\gamma_2 = \{\gamma_{Q_i Q_{i+1}}, i = 1, \dots, M\}$ en què cada segment es parametritza com a $\gamma_{AB}(s) = A + s\overline{AB}$ per a $s \in [0, 1]$, llavors la *GLI* entre les dues corbes és

$$GLI(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M GLI(\gamma_{P_i P_{i+1}}', \gamma_{Q_j Q_{j+1}}) \quad (2)$$

en què la *GLI* entre el parell de segments γ_{AB} i γ_{CD} es calcula com a

$$GLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD}) = \arcsin(\bar{n}_A \bar{n}_D) + \arcsin(\bar{n}_D \bar{n}_B) + \arcsin(\bar{n}_B \bar{n}_C) + \arcsin(\bar{n}_B \bar{n}_A) \quad (3)$$

amb

$$\bar{n}_A = \overline{AC} \times \overline{AD} / \|\overline{AC} \times \overline{AD}\|, \quad \bar{n}_B = \overline{BD} \times \overline{BC} / \|\overline{BD} \times \overline{BC}\|, \\ \bar{n}_C = \overline{BC} \times \overline{AC} / \|\overline{BC} \times \overline{AC}\|, \quad \bar{n}_D = \overline{AD} \times \overline{BD} / \|\overline{AD} \times \overline{BD}\|.$$

Observació 1. Aquesta fórmula *no* és una aproximació perquè és el valor exacte de la integral (1) quan s'aplica a corbes lineals a trossos.

La fórmula discreta (3) va ser utilitzada per Ho [15] per a identificar i sintetitzar caràcters animats en posicions entrelaçades [14, 15]. En el camp de la robòtica, la *GLI* s'ha aplicat a corbes representatives de l'espai de treball per a guiar la planificació del camí a través de forats [16, 37], per a guiar la premsió a [24, 30, 31] i per a planificar moviments de robots humanoides utilitzant la *GLI* per a guiar l'aprenentatge per reforç [36]. En aquest estudi desenvolupem, per primera vegada, una anàlisi més extensa d'aquesta noció per a poder aplicar-la a corbes planàries o quasi planàries, fet que obre la porta a un ventall d'aplicacions més ampli.

3. Derivació de les coordenades de tela

Com ja s'ha mencionat, la *GLI* de dues corbes coplanàries s'anul·la; per tant, per a moltes configuracions d'interès en robòtica (configuracions en què la tela està quasi plana sobre la taula, a punt per a ser plegada o ja plegada) la *GLI* no aporta gaire informació. Per això, el nostre objectiu en aquest apartat és desenvolupar un índex similar que pugui distingir les configuracions planàries. Com veurem, un índex que és natural de considerar és, de fet, una derivada direccional de la *GLI*, però per a obtenir aquest índex primer hem de fer algunes observacions sobre la *GLI* quan s'aplica a parells de segments com a l'equació (3), ja que la classe de corbes que utilitzarem en els càlculs serà corbes lineals a trossos.

3.1. GLI de dos segments

Com que dos segments AB i CD estan definits unívocament pels quatre punts extrems $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$, la GLI de dos segments calculada a l'equació (3) es pot considerar una funció de $(\mathbb{R}^3)^4 \cong \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$. Per tal d'emfatitzar que a partir d'ara considerarem només segments, definim $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$ com a

$$\mathcal{G}(A, B, C, D) = GLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD}) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{(\gamma_{CD} - \gamma_{AB}) \cdot [\gamma'_{CD} \times \gamma'_{AB}]}{\|\gamma_{CD} - \gamma_{AB}\|^3}. \quad (4)$$

Fixeu-vos que tècnicament $\mathcal{G}$ no és definida en tot $\mathbb{R}^{12}$ ja que no és definida quan γ_{AB} i γ_{CD} intersequen.

Lema 1. *Siguin dos segments no intersecants AB i CD amb punts extrems $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$, i siguin γ_{CD} i γ_{AB} que en denotin una parametrització. Llavors*

$$\mathcal{G}(A, B, C, D) = \mathcal{V}(A, B, C, D) \cdot \mathcal{I}(A, B, C, D)$$

en què $\mathcal{V}(A, B, C, D) = \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$ és el volum amb signe del tetraedre $ABCD$ multiplicat per 6 i

$$\mathcal{I}(A, B, C, D) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|\gamma_{CD} - \gamma_{AB}\|^3}.$$

Demostració. És un càlcul simple: fixeu-vos que el numerador en l'expressió integral de la GLI a l'equació (1) és constant (per a tot valor de t i s) perquè les corbes són segments i és igual a

$$\begin{aligned} (\gamma_{CD} - \gamma_{AB}) \cdot [\gamma'_{CD} \times \gamma'_{AB}] &= (\overline{AC} + t\overline{CD} - s\overline{AB}) \cdot [\overline{CD} \times \overline{AB}] = \\ &= \overline{AC} \cdot [\overline{CD} \times \overline{AB}] = \\ &= \overline{AC} \cdot [(\overline{CA} + \overline{AD}) \times \overline{AB}] = \\ &= \overline{AC} \cdot [\overline{AD} \times \overline{AB}] = \overline{AB} \cdot [\overline{AC} \times \overline{AD}] = \\ &= \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) \end{aligned}$$

el volum signat del tetraedre $ABCD$ multiplicat per 6. Escrivint

$$\mathcal{V}(A, B, C, D) = \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$$

i

$$\mathcal{I}(A, B, C, D) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|\gamma_{CD} - \gamma_{AB}\|^3}$$

tenim que

$$\mathcal{G} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{I} \quad (5)$$

Observació 2. Quan dos segments són coplanaris, la seva GLI s'anul·la perquè el tetraedre que defineixen té volum 0.

Corol·lari 1. *La funció $\mathcal{G}(A, B, C, D) = GLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD})$ és el producte de dues funcions diferenciables i, per tant, és diferenciable respecte a A, B, C, D .*

3.2. Derivada direccional de $\mathcal{G}$

En aquest apartat discutim com pertorbar $\mathcal{G}$ perquè sigui informativa en entorns planaris.

Definició 2 (derivada direccional de $\mathcal{G}$). Siguin $v_A, v_B, v_C, v_D \in \mathbb{R}^3$ direccions arbitràries i AB i CD dos segments no intersecants. La derivada direccional de $\mathcal{G}$ al punt (A, B, C, D) en la direcció de $v = (v_A, v_B, v_C, v_D)$ és definida com el límit

$$\partial_v \mathcal{G}(A, B, C, D) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}((A, B, C, D) + \epsilon(v_A, v_B, v_C, v_D)) - \mathcal{G}(A, B, C, D)}{\epsilon}.$$

Observació 3. Fixeu-vos que aquest límit existeix sempre perquè hem demostrat que $\mathcal{G}$ és una funció diferenciable respecte a A, B, C, D . Addicionalment, $\partial_v \mathcal{G}$ també es pot escriure

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{GLI(\gamma_{A^*B^*}, \gamma_{C^*D^*}) - GLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD})}{\epsilon},$$

en què $A^* = A + \epsilon v_A$, $B^* = B + \epsilon v_B$, $C^* = C + \epsilon v_C$, $D^* = D + \epsilon v_D$ i ϵ és prou petita perquè $A^* B^*$ i $C^* D^*$ no intersequin. A més, de l'equació (5) i per la regla del producte

$$\partial_v \mathcal{G} = \partial_v(\mathcal{V}) \mathcal{I} + \mathcal{V} \partial_v(\mathcal{I}),$$

per tant, $\partial_v \mathcal{G} = \partial_v(\mathcal{V}) \mathcal{I}$ quan els segments γ_{AB} i γ_{CD} són coplanaris.

Propietats de $\partial_v \mathcal{G}$. Per definició, $\partial_v \mathcal{G}$ és invariant a translacions, rotacions i escalat si v es rota i s'escala congruentment. Aquestes propietats són una conseqüència del fet que la GLI sigui invariant a aquestes transformacions. D'altra banda, si s'escull una v fixa, $\partial_v \mathcal{G}$ no és invariant a rotacions ni escalats en general. Per exemple, cap elecció de v no pot fer que $\partial_v \mathcal{G}$ sigui invariant a l'escalat, ja que escalar per un factor de λ escala $\mathcal{I}$ per $\frac{1}{\lambda^3}$ i $\nabla \mathcal{V}$ per λ^2 , de la mateixa manera que escala $\nabla \mathcal{I}$ per $\frac{1}{\lambda^4}$ i v per λ^3 , i això causa que s'escali $\nabla \mathcal{G}$ per $\frac{1}{\lambda}$. Segons per a què s'utilitzi l'índex, cal tenir present aquesta relació d'escala o, alternativament, escollir v depenent dels segments. Ara bé, la distància que utilitzarem per a comparar els diferents estats de la tela dependrà de la correlació dels valors de les coordenades més que de la magnitud. Per això, podem ignorar el factor d'escalat que apareixeria quan comparem dues peces de mida diferent (p. ex. a causa de les diferents malles que les aproximen).

Elecció de v . L'elecció és molt específica per a cada tasca, i donada la naturalesa de la nostra (classificar configuracions de tela planàries basades en les possibilitats de premsió), és lògic pertorbar els vèrtexs en la direcció normal al pla de la taula. En efecte, aquesta elecció de v fa que $\partial_v \mathcal{G}$ sigui invariant a rotacions i translacions del pla XY, fet que és desitjable per al nostre objectiu, ja que aquest tipus de moviments d'una configuració de tela tenen les mateixes possibilitats de premsió. Addicionalment, per a conservar la simetria $\partial_v \mathcal{G}(A, B, C, D) = \partial_v \mathcal{G}(C, D, A, B)$, hem de pertorbar A i C en la mateixa magnitud i la mateixa direcció, i el mateix per a B i D. Finalment, és fàcil veure que, de fet, pertorbar A i C en la mateixa magnitud normal al pla genera el mateix resultat que pertorbar B i D en la mateixa magnitud en la direcció contrària, per tant, només té sentit pertorbar A i C o B i D, però no tots dos parells, i fer una cosa o l'altra és equivalent excepte pel canvi de signe. En resum, l'elecció més natural de v en el nostre cas és

$$v := (\vec{0}, e_3, \vec{0}, e_3) \quad (6)$$

(o bé $v = (\vec{0}, e_3, \vec{0}, -e_3)$, que és equivalent excepte pel canvi de signe) en què $e_3 = (0, 0, 1)$ és el vector normal al pla de la taula on hi ha la tela.

3.3. Càlcul pràctic de la dGLI

Resumim la discussió de l'apartat anterior en aquesta definició.

Definició 3 ($dGLI$ de dos segments). Siguin dos segments no intersecants γ_{AB} i γ_{CD} , definim

$$dGLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{GLI(\gamma_{AB^*}, \gamma_{CD^*}) - GLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD})}{\epsilon}, \quad (7)$$

en què $B^* = B + \epsilon e_3$, $D^* = D + \epsilon e_3$, $e_3 = (0, 0, 1)$ i cada funció GLI es pot calcular amb l'equació (3). Aquest índex és invariant a rotacions i translacions del pla XY i, a més, $dGLI(\gamma_{CD}, \gamma_{AB}) = dGLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD})$.

Observació 4. Hem analitzat numèricament el límit definit a l'equació (7) i hem trobat que és prou estable per a calcular-lo segons

$$dGLI(\gamma_{AB}, \gamma_{AB}) \approx \frac{GLI(\gamma_{AB^*}, \gamma_{CD^*}) - GLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD})}{\epsilon}$$

per a un valor prou petit de ϵ . Com que treballem amb punts flotants de precisió doble (que suposa una precisió d'uns 14-15 decimals), se sap (vegeu [12]) que quan s'aproximen derivades numèricament, s'obtenen resultats millors si s'escullen perturbacions que afectin només 7 o 8 posicions decimals, per exemple $\epsilon \approx 10^{-8}$. Aquest és el valor que hem utilitzat en els experiments.

Observació 5. En casos pràctics, podríem calcular la $dGLI$ entre dos segments γ_{AB} i γ_{CD} quasi intersecants (però sense intersecar, ja que la tela té un gruix), i llavors la $dGLI(\gamma_{AB}, \gamma_{CD})$ esdevindria molt gran. Com que tenir quantitats tan grans pot dominar els valors de mètrica i les distàncies de manera no representativa, a la pràctica establim un valor màxim de la $dGLI$ quan supera un llindar marcat.

3.4. Definició de les coordenades de tela dGLI

Com que ara disposem d'un índex geomètric per a parells de segments, ja podem introduir les coordenades de la tela, que parametritzaran l'espai d'estats de forma de la tela. Assignem les *coordenades de tela dGLI* a una configuració de tela $\mathcal{C}$ d'una peça de roba de la manera següent:

Definició 4 ($dGLI$ de la superfície $\mathcal{C}$ d'una tela). Sigui una discretització del contorn de la superfície $\mathcal{C}$ de la tela com una corba poligonal, en seleccionem un subconjunt ordenat de segments de vores $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \{S_i : i = 1, \dots, m\}$. Llavors, les *coordenades de tela dGLI* de la configuració $\mathcal{C}$ és la matriu triangular superior

$$dGLI(\mathcal{C}) = (dGLI(S_i, S_j))_{S_i, S_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}, i > j}. \quad (8)$$

Per a tenir una idea intuïtiva de l'aspecte d'aquestes matrius triangulars superiors per a algunes configuracions de la tela, vegeu els exemples a la figura 1. Si ens interessem una direcció general v , hauríem d'agafar les *coordenades de tela dGLI*

$$dGLI_v(\mathcal{C}) = (\partial_v \mathcal{G}(S_i, S_j))_{S_i, S_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}, i > j}.$$

Fixeu-vos que la matriu sencera quan s'agafen tots els segments de vores de la discretització és l'enfocament anàleg a calcular la GLI d'una corba polinòmica utilitzat a [15, 19], en què tots els parells de segments de les corbes formen el que s'anomena *matriu de GLI* [15].

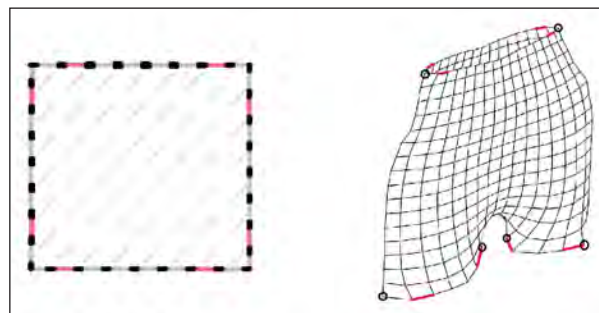


FIGURA 2. El subconjunt de segments escollits es marca en vermell. Per a aquests pantalons curts, quatre de les vores del contorn seleccionades de la part de darrere no es veuen a la imatge.

Elecció dels segments de les vores. El subconjunt $\mathcal{S}_c$ de segments de vores escollit en la discretització depèn de la tasca en qüestió, ja que les tasques que requereixen distingir amb més detall les configuracions d'una classe similar necessiten un subconjunt de segments més gran. Com que nosaltres volíem classificar les configuracions en classes relativament àmplies, vam determinar experimentalment que una bona elecció de segments per a una tela rectangular són els vuit segments adjacents als segments de les puntes, marcats en vermell a la imatge esquerra de la figura 2. En el cas d'una peça de roba amb una topologia més complexa, cal escollir més segments, p. ex. per a uns pantalons curts escollim els dotze segments marcats en vermell a la imatge dreta de la figura 2. En tots dos casos, aquest subconjunt petit és suficient per a obtenir una classificació encertada de les configuracions quasi planes de la roba en funció de les possibilitats de premsió.

La matriu triangular superior de l'equació (8), ordenada com un vector, és un sistema de coordenades que redueix les infinites dimensions de l'espai de configuracions dels estats de la tela a un espai de només $\frac{m(m-1)}{2}$ dimensions. Per exemple, per a una tela rectangular $m = 8$ i s'obtenen 28 dimensions. Aquesta reducció de dimensions s'ajusta correctament i és prou informativa per a les necessitats pràctiques com demostren els resultats de la validació de l'apartat següent.

4. Resultats

En aquest apartat estudiem la capacitat de les coordenades de la tela ja definides per a diferenciar els estats de la tela. Primer, analitzem quatre seqüències de plegament (vegeu la figura 3). Demostrarem que la nostra representació pot distingir diferents configuracions de la tela rellevants (p. ex. una punta plegada i dues puntes plegades). Llavors, aplicarem el mètode a una base de dades completa amb dotze classes de tela (que es mostren a la figura 4) i el compararem amb quatre representacions alternatives per a demostrar que la nostra és més apta per a distingir entre els estats de la tela. Totes les dades d'aquest apartat es van simular utilitzant el model de tela inextensible descrit a [7]. Totes les simulacions s'han dut a terme amb una tela quadrada de dimensions $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ i una malla computacional de 400 nodes; excepte per als pantalons curts (la forma dels quals prové de la UC Berkeley Garment Library), que consisteixen en 537 nodes (vegeu la figura 2 a la dreta). Per acabar, aplicarem un mètode de classificació simple utilitzant la nostra representació a imatges reals d'estats de plegament de tela.

Per a comparar configuracions de tela diferents, un cop s'han representat amb les nostres *coordenades de tela* $dGLI(\mathcal{C}) \in \mathbb{R}^{28}$, és important utilitzar la distància adequada. A causa del factor d'escalat que hem tractat a l'apartat anterior, la millor distància és la *distància de Spearman*. Siguin dos vectors x i y , es defineix

$$d(x, y) = 1 - \rho(R(x), R(y)), \quad (9)$$

en què ρ és el coeficient de correlació de Pearson, i $R(x)$ és la variable de rànquing de x (és a dir que s'ordenen les coordenades de x de menor a major i se'ls assigna una posició dins del rànquing). Aquesta distància avalua com de bé es pot definir la relació entre dos vectors x i y utilitzant qualsevol funció monòtona (no només una recta). Aquesta distància va resultar ser més sensible als canvis de la configuració de la tela que la distància euclidiana. Això pot ser perquè aquesta distància se centra en l'ordre del rànquing entre coordenades (amb signe) en comptes de comparar-ne les magnituds, cosa que és molt important en la nostra representació. Fixeu-vos que la distància de Spearman està restringida a valors entre 0 i 2 i que ignora els factors d'escalat entre les diferents teles.

4.1. Anàlisi de les seqüències de plegament

La primera prova compara diferents estats de la tela dins d'una seqüència de plegament. Sigui el moviment de la tela $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$, en què m és el nombre de fotogrames discrets i $\mathcal{C}_i$ és l'estat de la tela a t_i , calculem la matriu de confusió $\mathcal{M}_{ij} = d(dGLI(\mathcal{C}_i), dGLI(\mathcal{C}_j))$. Les quatre seqüències de plegament, mostrades a l'esquerra de la figura 3, són: plegar dues puntes oposades, plegar les quatre puntes cap a dins, plegar la tela per la meitat i plegar uns pantalons curts per la meitat dinàmicament. Els resultats es veuen a la dreta de la figura. Fixeu-vos que la nostra representació detecta els canvis significatius durant la seqüència. Per exemple, a la seq. 1, plegar dues puntes oposades, al fotograma 7 hi ha un canvi important, ja que una punta canvia l'orientació de plana a plegada, fins i tot abans que es deixi anar. Això es pot veure a la matriu de confusió (els dos primers quadrats blaus). També queda clar a la seq. 2, quan es pleguen les quatre puntes cap a dins. A més, el nostre mètode també detecta quan les vores de la tela es creuen (seq. 1, fotograma 24; seq. 3, fotograma 23). Aquests canvis també són significatius des del punt de vista de la manipulació perquè permeten possibilitats de premsió o d'acció diferents. La seq. 4 mereix una menció especial, ja que la tela té una topologia no trivial i la peça de roba penja en comptes d'estar plana durant una part significativa del plegament. En aquesta seqüència, la nostra representació detecta correctament el moment en què els pantalons toquen la taula (fotograma 14), quan les dues puntes superiors controlades comencen a descendir (fotograma 19) i quan acaba el plegament (fotograma 32).

4.2. Matriu de confusió de la base de dades completa

Ara analitzarem una base de dades completa amb 120 exemples classificats en 12 classes d'estats diferents, que es mostren a la figura 4. La major part són fàcils d'entendre. Fixeu-vos que en la classe 10 la punta superior esquerra es plega per sota de la tela (i el mateix per a la classe 11). Cada classe té 10 mostres que es corresponen amb l'estat

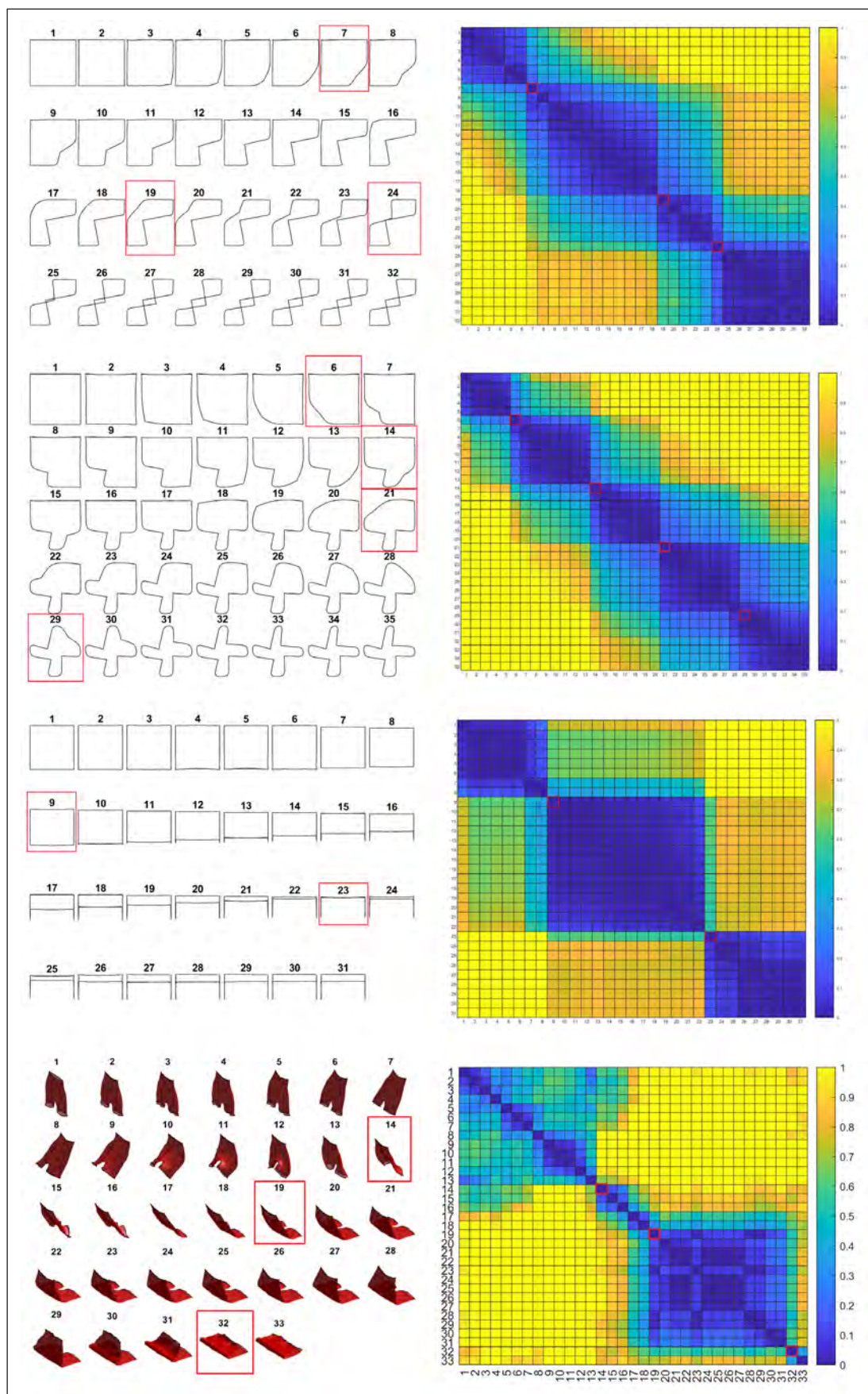


FIGURA 3. Estudi de l'índex durant quatre seqüències de plegament. A la columna de l'esquerra es mostra una representació dels fotografes de la tela, i a la columna de la dreta hi ha la matriu de confusió. Es destaquen en vermell els canvis de classe que es poden identificar.

final de la tela durant una simulació de la seqüència de plegament. Vam identificar manualment les mostres que consideràvem que pertanyien al mateix estat. Volem destacar que, un cop hem fixat un ordre per a les puntes, el nostre mètode distingeix, per exemple, entre puntes plegades diferents i que això no contradiu la invariància a la rotació vista abans.

Tornem a calcular la matriu de confusió $M_{ij} = d(dGLI(C_i), dGLI(C_j))$ en què C_k és l'exemple número k de la base de dades. Ordenem les mostres de manera que les de la mateixa classe siguin consecutives i així el gràfic de la matriu sigui més fàcil d'interpretar. A la figura 4 es pot veure com

les classes s'agrupen sense confusió, és a dir, la distància entre els membres d'una classe acostuma a ser més petita (en blau) que la distància amb exemples d'una altra classe (en groc).

La matriu de confusió ofereix informació interessant sobre la nostra representació. Per exemple, podem veure que les classes 01 i 04 són relativament més properes que la resta. Això passa perquè, efectivament, la posició relativa de totes les vores és la mateixa en totes dues classes, fet que redueix la distància en la representació. El mateix fenomen s'observa entre les classes 05 i 12 en alguns casos, ja que són classes amb similituds visibles (però a 05 les

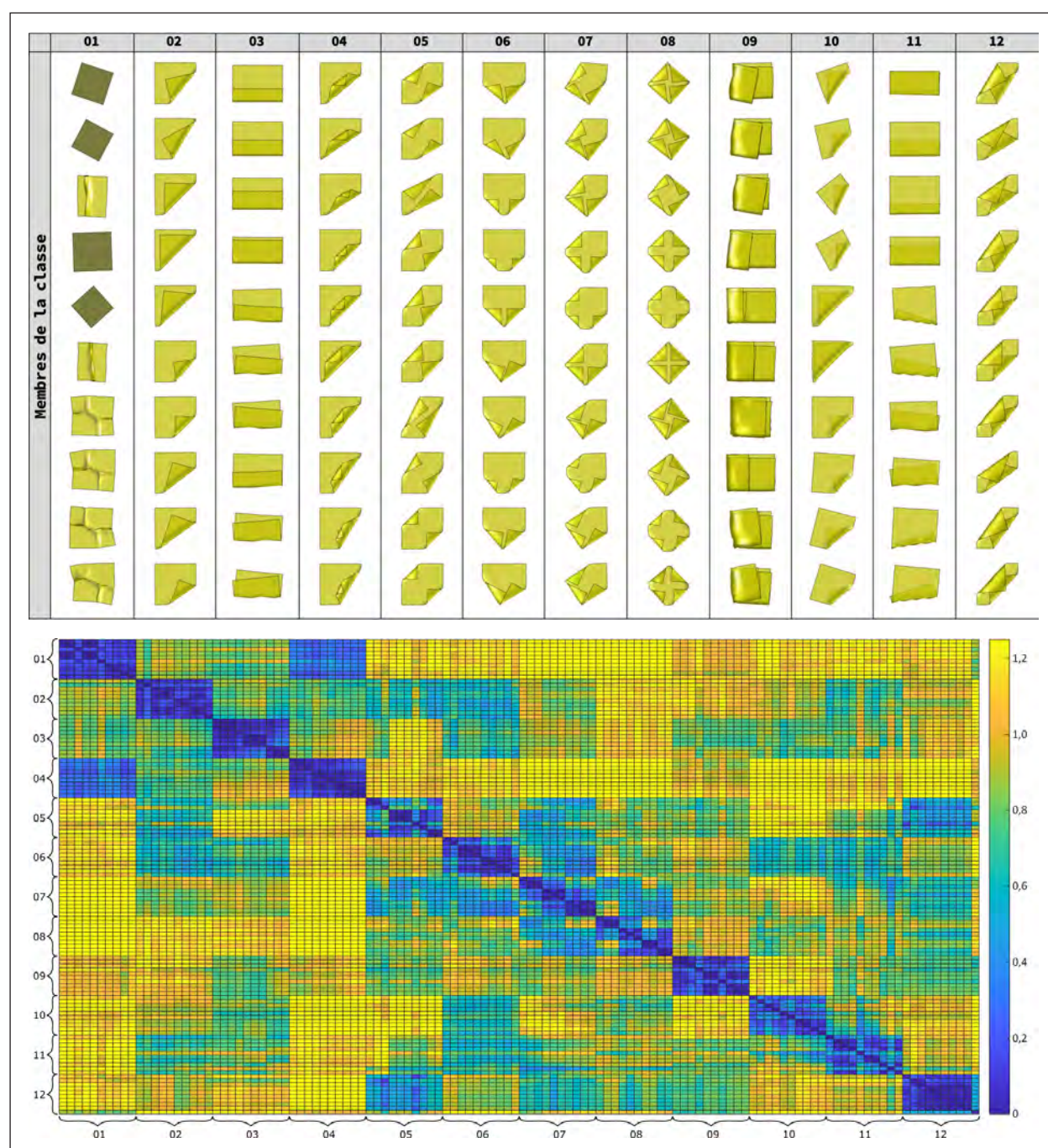


FIGURA 4. Matriu de confusió de totes les distàncies entre els estats que es mostren a la taula superior.

dues puntes no es creuen, mentre que a 12 sf). D'altra banda, les classes 03 i 11, que es diferencien en si el plegament fa que una cara de la tela amagui la cara oposada, estan perfectament separades. Els casos límit, que són el quart element de la classe 03 i el primer element de la classe 11, són molt semblants, però el nostre mètode els distingeix gràcies a la posició geomètrica relativa entre els segments (és a dir, un és l'invers de l'altre). Passa una cosa similar entre les classes 02 i 10. També cal mencionar que algunes classes que vam etiquetar com la mateixa tenen subclases evidents, que es mostren a la matriu de confusió. És el cas de les classes 05, 07 i 08, que tenen puntes plegades en orientacions diferents. La nostra representació ens permet induir una partició de l'espai per a separar aquest tipus de classe en dos.

4.3. Comparació amb altres representacions de forma

En aquest subapartat fem una comparació més quantitativa entre la nostra representació d'estats i altres mètodes de representar formes. Per a avaluar les representacions utilitzem l'índex de Davies-Bouldin per a mesurar la separació dels clústers [8]:

$$DB = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{j \neq i} \left(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{d(c_i, c_j)} \right) \quad (10)$$

en què n és el número de classes (p. ex. en la base de dades és 12), c_i és el centroide de la classe i (la mitjana de les coordenades dels membres de la classe i), σ_i és una mesura de la dispersió calculada com la distància mitjana de tots els elements de la classe i al centroide c_i , i $d(c_i, c_j)$ és la distància entre els centroides c_i i c_j . Segui la classificació de les figures 3 i 4 considerada la veritat de referència, volem una representació que doni una dispersió petita dins d'una classe i una distància gran entre classes, fet que produirà un índex baix. La representació i la distància amb el DB més petit es considera la que millor separa els clústers i, per tant, la millor representació per a identificar estats de roba diferents.

TAULA 1
Comparació entre representacions de forma diferents*

	Base de dades	Seq. I	Seq. II	Seq. III	Seq. IV
<i>dGLI</i>	0,73	0,27	0,18	0,21	0,52
Segments	1,60	0,68	0,77	0,51	1,91
Puntes	2,49	0,98	1,61	3,14	1,86
Fréchet	0,99	0,69	0,76	0,48	0,90
Hausdorff	1,45	0,71	0,84	0,49	0,90

* Els nombres són l'índex de Davies-Bouldin presentat a l'equació (10), que mesura la qualitat de la separació dels clústers: com més petit, millor separació. Es marquen en negreta els valors més petits de cada columna.

Primer utilitzem dues representacions simples de la forma de la tela amb característiques de nivell baix similars a les usades en la nostra:

i) Segments: per a una malla determinada escollim els segments de les vores mostrats a la figura 2 i calculem la distància mínima per parells. Això genera un vector de representació de llargada equivalent a les *coordenades dGLI* (fixeu-vos que, a diferència de la *dGLI*, les coordenades d'aquest vector sempre són no negatives). Utilitzem la distància de Spearman per a comparar dues mostres diferents. Aquesta representació és invariant a moviments rígids del pla.

ii) Puntes: per a una malla rectangular determinada calculem la distància per parells entre les quatre puntes. En el cas dels pantalons curts, agafem els 6 nodes indicats a la figura 2. Es poden calcular 6 o 15 números no negatius per a qualsevol tela que són invariants a moviments rígids i donen una representació trivial de l'estat de la tela. També utilitzem la distància de Spearman per a comparar les diferents mostres.

Utilitzem també dos mètodes clàssics per a mesurar distàncies entre corbes i polígons [4, 33] agafant la corba discreta completa del contorn de les peces de roba com la representació d'estat:

iii) Fréchet: per a comparar dues mostres diferents calculem la distància de Fréchet (discreta) [10] entre les corbes. Aquesta distància té en compte la localització i l'ordenació dels punts al llarg de les corbes. Com que aquesta distància no és invariant a moviments rígids, cal centrar i alinear les mostres amb cura abans de comparar-les. Per a fer-ho, se centren les corbes a l'origen i se'n fa un alineament rígid calculant la rotació que minimitza la distància entre els punts de les corbes.

iv) Hausdorff: per a comparar dues mostres diferents calculem la distància de Hausdorff (discreta) entre els punts de les corbes [13]. En essència, dues corbes són properes segons Hausdorff si cada punt de les corbes és proper a algun punt de l'altra. Aquesta distància no té en compte el fet que els conjunts que compara són corbes i, per tant, s'espera que sigui menys sensible que la distància de Fréchet. Igual que abans, com que aquesta distància no és invariant a moviments rígids, cal centrar i alinear les mostres abans de comparar-les.

A la taula 1 es mostra el càlcul de l'índex DB per a les nostres *coordenades dGLI* i els altres quatre mètodes presentats utilitzant la base de dades completa i les quatre seqüències de plegament mencionades com a escenaris de prova. A la taula s'aprecia que el nostre mètode obté el DB més baix en els cinc escenaris, fet que indica que entre els mètodes estudiats el nostre és el que millor representa els diferents estats de plegament dels tèxtils.

4.4. Classificació d'imatges reals

Havent comprovat que el nostre mètode era capaç de representar els estats de plegament de la tela amb precisió, vam

implementar un classificador simple d'estats de plegament de tela real per a avaluar-ne l'aplicabilitat. Per a fer-ho, s'escull un element representatiu sintètic de cada classe en la base de dades de la figura 4 i s'estima la classe d'una mostra real nova no classificada per a escollir-ne el representant més proper utilitzant la distància de Spearman.

Les imatges reals es prenen des d'una posició zenital a 52 cm de la taula amb una càmera 3D Microsoft Azure Kinect DK. S'utilitza un únic tovalló amb tres adhesius de colors (que implementen un codi de variacions de quatre colors) enganxats al llarg de cada segment de la vora, prop d'una punta i a cada banda. Primer utilitzem la segmentació per color per a detectar el centre de cada adhesiu i obtenir el punt 3D corresponent del mapa de profunditat. Havent detectat tots els marcadors, amb les combinacions de colors a cada segment podem identificar cada punta individual de la tela (hi ha quatre adhesius del mateix color al voltant de cada punta) i les seves posicions al segment segons la mateixa selecció de segments a les vores que a la figura 2. La mida obtinguda de les vores observades és més de 400 vegades més gran que les vores de les mostres de la base de dades simulada, però gràcies a utilitzar la distància de Spearman, això no afecta els valors de la distància quan es comparen formes de mides diferents.

A la matriu de confusió de la figura 4 es pot veure que algunes classes tenen més dispersió en distància a causa

de la variació d'orientació de les puntes. Per a aquestes classes hem escollit tres representants diferents que es corresponen amb els tres subgrups que s'identifiquen clarament en la matriu de confusió. Mostrem la silueta dels representants escollits per a cada classe a la figura 5. La taula de la figura 6 mostra els resultats de la classificació.

L'únic error de classificació és l'última imatge de la classe 04. D'altra banda, fixeu-vos que és un cas molt extrem, en què les vores de la tela estan en una posició relativa molt similar al cas pla sense plegar i per això es classifica com a classe 01. És un error comprensible, ja que la tela es pot considerar prou plana.

Fixeu-vos que només podem detectar els tèxtils amb tots els adhesius visibles i, per tant, les classes amb vores amagades, com ara les classes des de la 09 fins a la 12, que tenen un plegament per sota de la roba, no apareixen al conjunt de mostres reals. D'altra banda, el classificador va utilitzar les dotze classes de la base de dades simulada igualment i això demostra que les classes absents no generen confusió en el procés de classificació.

5. Conclusions

Hem proposat les *coordenades de tela dGLI*, una representació de les configuracions de la tela basades en una derivada

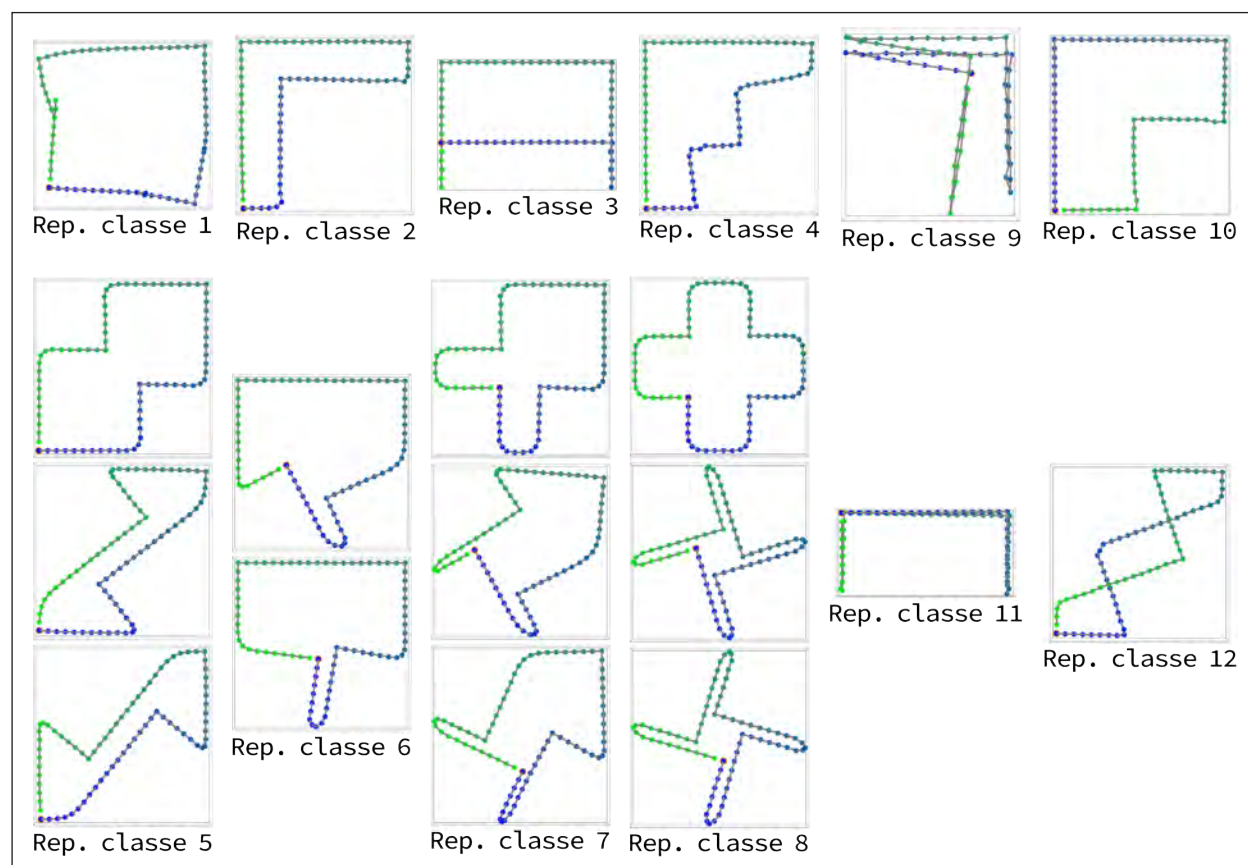


FIGURA 5. Representants sintètics escollits per a cada classe. Quan només se n'escull un, és el més proper al centroid de la classe. Quan una classe és més dispersa, s'escullen representants addicionals per a representar els subgrups de la classe.

VT	Imatges del tovalló amb la classe assignada						
02							
	02	02	02	02	02	02	02
03							
	03	03	03	03	03	03	
04							
	04	04	04	04	04	04	01
05							
	05	05	05	05	05	05	05
06							
	06	06	06	06			
07							
	07	07	07	07	07	07	
08							
	08						

FIGURA 6. Resultats de la classificació d'imatges reals utilitzant la base de dades simulada de la figura 4 com a referència. La primera columna mostra la classe veritat de referència (VR) de les imatges i sota de cada imatge s'indica la classe assignada.

direccional d'un índex topològic que redueix en gran manera la dimensió de l'espai de configuracions de la tela fins a un vector de dimensió 28 (per a una tela rectangular). No obstant això, aquesta representació reduïda conserva prou informació sobre les configuracions per a distingir-les segons les possibilitats de premsió utilitzant la distància de Spearman. El fet que amb la nostra representació puguem classificar configuracions de tela reals a partir de mostres simulades (figura 6) és molt prometedor per a aplicacions

de planificació de manipulació de tela. Addicionalment, la nostra representació permet diferents eleccions de v , la direcció de pertorbació, i de $\mathcal{S}$, el subconjunt de segments de vores escollit, per tal que es pugui ajustar la representació a la tasca en qüestió i millorar-ne els resultats. A més a més, hem avaluat amb èxit el poder expressiu de la nostra representació durant la seqüència de plegament d'una peça de roba amb una topologia no trivial (uns pantalons curts). Per acabar, com que el nostre mètode no està basat

en l'aprenentatge, no necessita dades d'entrenament, és del tot explicable i és robust respecte a configuracions que no pertanyin al conjunt d'entrenament.

En resum, les *coordenades de tela dGLI* permeten la connexió entre les característiques de nivell baix en les diferents configuracions de la tela, com ara la posició de puntes i vores, i la identificació semàntica d'alt nivell dels estats de la tela, que es relaciona amb les possibilitats de prensió que ofereix.

6. Limitacions i estudis futurs

Tot i que aquest estudi fa una suposició agosarada, que és que coneixem tota la vora de la tela, els algorismes de percepció comencen a oferir solucions a aquest problema. Per exemple, a [26] es desenvolupa un mètode per a detectar parts de roba adequades per a la prensió i, més recentment, l'enfocament d'aprenentatge profund presentat a [25] pot identificar puntes i vores, malgrat que encara no identifiqui tot el contorn. El nostre grup està treballant en diferents mètodes matemàtics i d'aprenentatge profund per a *al·lucinar* el contorn complet a partir d'una imatge (o núvol de punts) de la tela per a superar aquesta limitació.

Mentrestant, la nostra representació és completament vàlida per a simulacions amb diverses aplicacions importants, com ara construir conjunts de dades que requereixin segmentació automàtica dels estats de la tela (p. ex. [5]), monitorar la manipulació de la tela i guiar els mètodes de planificació. Tenim la intenció de seguir aquestes línies de recerca a les quals aquest estudi ha obert la porta.

Els estudis futurs també han d'incloure una anàlisi detallada de l'espai de configuracions definit per les nostres coordenades. En particular, ens agradaria identificar una partició de l'espai que correspongui a una partició de configuracions segons les possibilitats de prensió, els estats de les quals siguin veïns en aquesta partició, i quins són els camins més curts d'un estat a l'altre. S'espera que aquesta línia de recerca sigui especialment complexa i rica per a peces de roba amb topologia no trivial. Volem dur a terme aquest estudi de manera analítica i mitjançant mètodes d'aprenentatge, els quals creiem que donaran resultats millors quan es disposi de més dades i se'ls doni una estructura amb la nostra representació.

Agraïments

Aquest estudi es va fer dins del projecte CLOTHILDE, que ha rebut finançament del Consell Europeu de Recerca (ERC) dins del programa de recerca i innovació de la UE Horitzó 2020 (acord de subvenció núm. 741930). M. Alberich-Carramiñana també està afiliada a la Barcelona Graduate School of Mathematics (BGSMath) i a l'Institut de Matemàtiques de la UPC-BarcelonaTech (IMTech), i tant ella com J. Amorós estan finançats parcialment per

l'Agència Estatal d'Investigació espanyola AEI/10.13039/501100011033 subvenció PID2019-103849GB-I00 i pel projecte AGAUR 2021 SGR 00603 Geometry of Manifolds and Applications, GEOMVAP. J. Borràs està finançada per l'Agència Estatal d'Investigació espanyola MCIN/AEI/10.13039/501100011033 subvenció PID2020-118649RB-I00 (projecte CHLOE-GRAPH).

Bibliografia

- [1] ADLINGER, J.; KLAPPER, I.; TABOR, M. (1995). «Formulae for the calculation and estimation of writhe». *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, núm. 4, p. 343-372.
- [2] AKSOY, E. E.; ABRAMOV, A.; DÖRR, J.; NING, K.; DELLEN, B.; WÖRGÖTTER, F. (2011). «Learning the semantics of object-action relations by observation». *International Journal of Robotics Research*, núm. 30 (10), p. 1229-1249.
- [3] ALBERICH-CARRAMIÑANA, M.; AMORÓS, J.; COLTRARO, F. (2021). *Developable surfaces with prescribed boundary: A Extended Abstracts GEOMVAP 2019*. Springer-Birkhaeuser.
- [4] ALT, H.; GODAU, M. (1995). «Computing the fréchet distance between two polygonal curves». *International Journal of Computational Geometry & Applications*, núm. 5(01n02), p. 75-91.
- [5] BORRÀS, J.; BOIX-GRANELL, A.; FOIX, S.; TORRAS, C. (2023). «A virtual reality framework for fast dataset creation applied to cloth manipulation with automatic semantic labelling». A: *2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation [IEEE]*, p. 11605-11611.
- [6] BOUSQUET-JETTE, C.; ACHICHE, S.; BEAINI, D.; LAW-KAM CIO, Y.; LEBLOND- MÉNARD, C.; RAISON, M. (2017). «Fast scene analysis using vision and artificial intelligence for object prehension by an assistive robot». *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, núm. 63, p. 33-44.
- [7] COLTRARO, F.; AMORÓS, J.; ALBERICH-CARRAMIÑANA, M.; TORRAS, C. (2022). «An inextensible model for the robotic manipulation of textiles». *Applied Mathematical Modelling*, núm. 101, p. 832-858.
- [8] DAVIES, D. L.; BOULDIN, D. W. (1979). «A cluster separation measure». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI, núm. 1(2), p. 224-227.
- [9] DOUMANOGLOU, A.; STRIA, J.; PELEKA, G.; MARIOLIS, I.; PETRIK, V.; KARGAKOS, A.; WAGNER, L.; HLAVAC, V.; KIM, T.-K.; MALLASSIOTIS, S. (2016). «Folding clothes autonomously: A complete pipeline». *IEEE Transactions on Robotics*, núm. 32 (6), p. 1461-1478.
- [10] EITER, T.; MANNILA, H. (1994). *Computing discrete fréchet distance*.
- [11] EPPLE, M. (1998). «Orbits of asteroids, a braid, and the first link invariant». *The Mathematical Intelligencer*, núm. 20, p. 45-52.
- [12] FAIRES, J.; BURDEN, R. (2012). *Numerical Methods*. 4a ed. Cengage Learning.
- [13] HENRIKSON, J. (1999). «Completeness and total boundedness of the hausdorff metric». *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, núm. 1 (69-80), p. 10.

- [14] HO, E. S.; KOMURA, T.; RAMAMOORTHY, S.; VIJAYAKUMAR, S. (2010). «Controlling humanoid robots in topology coordinates». A: *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, p. 178-182.
- [15] HO, S. L. (2011). *Topology-based character motion synthesis*. Tesi doctoral. University of Edinburgh.
- [16] IVAN, V.; ZARUBIN, D.; TOUSSAINT, M.; KOMURA, T.; VIJAYAKUMAR, S. (2013). «Topology-based representations for motion planning and generalization in dynamic environments with interactions». *The International Journal of Robotics Research*, núm. 32 (9-10), p. 1151-1163.
- [17] JANGIR, R.; ALENYA, G.; TORRAS, C. (2020). «Dynamic cloth manipulation with deep reinforcement learning». A: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 4630-4636.
- [18] KLENIN, K.; LANGOWSKI, J. (2000). «Computation of writhe in modeling of supercoiled DNA». *Biopolymers*, núm. 54 (5), p. 307-317.
- [19] LEVITT, M. (1983). «Protein folding by restrained energy minimization and molecular dynamics». *Journal of Molecular Biology*, núm. 170 (3), p. 723-764.
- [20] LIPPI, M.; POKLUKAR, P.; WELLE, M. C.; VARAVA, A.; YIN, H.; MARINO, A.; KRAGIC, D. (2020). «Latent space roadmap for visual action planning of deformable and rigid object manipulation». A: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 5619-5626.
- [21] MATAS, J.; JAMES, S.; DAVISON, A. J. (2018). «Sim-to-real reinforcement learning for deformable object manipulation». A: *Proceedings of Conference on Robotic Learning*.
- [22] MILLER, S.; BERG, J. VAN DEN; FRITZ, M.; DARRELL, T.; GOLDBERG, K.; ABBEEL, P. (2012). «A geometric approach to robotic laundry folding». *The International Journal of Robotics Research*, núm. 31 (2), p. 249-267.
- [23] POHL, W. F. (1980). «DNA and differential geometry». *The Mathematical Intelligencer*, núm. 3, p. 20-27.
- [24] POKORNY, F. T.; STORK, J. A.; KRAGIC, D. (2013). «Grasping objects with holes: A topological approach». A: *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, p. 1100-1107.
- [25] QIAN, J.; WENG, T.; ZHANG, L.; OKORN, B.; HELD, D. (2020). «Cloth region segmentation for robust grasp selection». A: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 9553-9560.
- [26] RAMISA, A.; ALENYÀ, G.; MORENO-NOGUER, F.; TORRAS, C. (2016). «A 3d descriptor to detect task-oriented grasping points in clothing». *Pattern Recognition*, núm. 60, p. 936-948.
- [27] RICCA, R. L.; NIPOTI, B. (2011). «Gauss linking number revisited». *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, núm. 20, p. 1325-1343.
- [28] SANCHEZ, J.; CORRALES, J.-A.; BOUZGARROU, B.-C.; MEZOUAR, Y. (2018). «Robotic manipulation and sensing of deformable objects in domestic and industrial applications: a survey». *The International Journal of Robotics Research*, núm. 37 (7), p. 688-716.
- [29] SEITA, D.; GANAPATHI, A.; HOQUE, R.; HWANG, M.; CEN, E.; TANWANI, A. K.; BALAKRISHNA, A.; THANANIEYAN, B.; ICHNOWSKI, J.; JAMALI, N. et al. (2020). «Deep imitation learning of sequential fabric smoothing policies». A: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 9651-9658.
- [30] STORK, J. A.; POKORNY, F. T.; KRAGIC, D. (2013). «Integrated motion and clasp planning with virtual linking». A: *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, p. 3007-3014.
- [31] STORK, J. A.; POKORNY, F. T.; KRAGIC, D. (2013). «A topology-based object representation for clasping, latching and hooking». A: *2013 13th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*. IEEE, p. 138-145.
- [32] TANAKA, D.; ARNOLD, S.; YAMAZAKI, K. (2018). «Emd net: An encode-manipulate-decode network for cloth manipulation». *IEEE Robotics and Automation Letters*, núm. 3 (3), p. 1771-1778.
- [33] VELTKAMP, R. C.; HAGEDOORN, M. (2001). «State of the art in shape matching». A: *Principles of visual information retrieval*, p. 87-119.
- [34] WÖRGÖTTER, F.; AKSOY, E. E.; KRÜGER, N.; PIATER, J.; UDE, A.; TAMOSIUNAITE, M. (2013). «A simple ontology of manipulation actions based on hand-object relations». *IEEE Transactions on Autonomous Mental Development*, núm. 5 (2), p. 117-134.
- [35] YIN, H.; VARAVA, A.; KRAGIC, D. (2021). «Modeling, learning, perception, and control methods for deformable object manipulation». *Science Robotics*, núm. 6 (54), p. eabd8803.
- [36] YUAN, W.; HANG, K.; SONG, H.; KRAGIC, D.; WANG, M. Y.; STORK, J. A. (2019). «Reinforcement learning in topology-based representation for human body movement with whole arm manipulation». A: *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, p. 2153-2160.
- [37] ZARUBIN, D.; IVAN, V.; TOUSSAINT, M.; KOMURA, T.; VIJAYAKUMAR, S. (2012). «Hierarchical motion planning in topological representations». A: *Proceedings of Robotics: Science and Systems VIII*.